Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **VI,** 5.

ÜBER FLÄCHEN VON MAXIMALINDEX

VON

C. JUEL

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1924

Pris: Kr. 1,25.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs videnskabelige Meddelelser udkommer fra 1917 indtil videre i følgende Rækker:

Historisk-filologiske Meddelelser,
Filosofiske Meddelelser,
Mathematisk-fysiske Meddelelser,
Biologiske Meddelelser.

Prisen for de enkelte Hefter er 50 Øre pr. Ark med et Tillæg af 50 Øre for hver Tavle eller 75 Øre for hver Dobbelttavle.

Hele Bind sælges dog 25 pCt. billigere.

Selskabets Hovedkommissionær er *Andr. Fred. Høst & Søn*, Kgl. Hof-Boghandel, København.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **VI,** 5.

ÜBER FLÄCHEN VON MAXIMALINDEX

VON

C. JUEL

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1924

VORWORT

Der von Mrs. Angas Scott eingeführte Begriff Index einer ebenen Kurve hat sich auch in dem Sinne als fruchtbar erwiesen, dass er zu nicht uninteressanten Problemen Anlass gegeben hat, um so mehr als er für nicht algebraische Kurven endlicher Ordnung ebenso viel Bedeutung hat, wie für algebraische. Besonderes Interesse erweckt die Frage nach den Kurven von Maximalindex — und ebenso von Maximalklassenindex. Der Begriff ist auch schon mehrfach auf Raumkurven erweitert worden.

Es liegt nun sehr nahe, auch die Flächen von Maximalindex zu untersuchen; eine Fläche $n$ter Ordnung ist von Maximalindex (von M. I.), wenn sie von jeder Geraden entweder in n oder auch in $(n-2)$ getrennten oder zusammenfallenden Punkten geschnitten wird (wobei selbstverständlich nur von reellen Elementen die Rede ist).

In der vorliegenden Arbeit beabsichtige ich besonders die Regelflächen zu behandeln und bestimme sämtliche topologisch irreduktible Regelflächen von M. I. Es ergibt sich, dass man nur zwei Möglichkeiten hat; die eine liefert eine Regelfläche mit einer $(n-1)$fachen, die andere eine solche mit einer $(n-2)$fachen Leitlinie. Mit diesen kann man die reduktiblen durch Zusammenzetzung herstellen. Für $n = 4$ habe ich auch alle die möglichen Zusammenstellungen gegeben, wobei es sich sowohl um nicht algebraische Elementarflächen wie um algebraische Flächen handelt. Weil eine Regelfläche von M. I. auch eine Fläche von Maximalklassenindex ist, sind die letzteren auch hier mitbestimmt.

Als Flächen von M. I., welche keine Regelflächen sind, hat man schon die Flächen zweiter und dritter Ordnung. Für die Flächen vierter Ordnung, welche keine Linienflächen sind, bestimme ich noch die einzige solche Fläche von M. I., welche sich als eine Steinersche Fläche erweist. Es ist nicht unmöglich, dass dies die einzige algebraische und irreduktible Fläche von M. I. ist, welche nur eine endliche Zahl von Geraden enthält, aber ich muss diese Frage liegen lassen.

Ich bemerke noch, dass die vorliegende Arbeit in starker Verbindung steht mit einer früheren über Kurven von M. I. auf einer einfachen Regelfläche. Dort war es aber mir die Hauptsache, für die betrachteten Kurven die charakteristischen Zahlen zu finden, und es sind deshalb die hier gegebenen Beweise von anderer Art als die früheren.

§ 1.
Einleitende Sätze.

Index einer ebenen Kurve ist nach Mrs. ANGAS SCOTT die kleinste Zahl, so wie Ordnung die grösste Zahl der Schnittpunkte der Kurve mit einer Geraden ihrer Ebene ist; selbstverständlich ist hier ausschliesslich von reellen Gebilden die Rede.[1]

Zusammenfallende Schnittpunkte mit einer Geraden a werden so abgeschätzt, dass man die Lage der Geraden ein wenig ändert und daraus ersieht, wie viele von den neuen Schnittpunkten zusammenrücken, wenn die geänderte Gerade wieder in a übergeht. Dies ist jedoch so zu verstehen, dass man diese Bestimmung für jeden mehrfachen Schnittpunkt für sich anstellen soll. So hat z. B. eine einfache Tangente zwei und eine Wendetangente drei zusammenfallende Punkte mit der Kurve gemein. Wenn nun die Wendetangente in A die Kurve in einem anderen Punkt B berührt, dann rechnet man, dass diese Gerade in A und B zusammen fünf Punkte mit der Kurve gemein hat, selbst wenn man keine der genannten Tangente naheliegende Gerade finden kann, welche fünf A und B naheliegende Punkte mit der Kurve gemein hat.

Eine durch eine Spitze A gehende allgemeine Gerade

[1] Siehe: »On the circuits of plane curves« by CHARLOTTE ANGAS SCOTT; Transactions of the American Math. Society. Vol. 3. 1902 p. 388.

schneidet dort in zwei zusammenfallenden Punkten, eine Tangente aber in drei. Man rechnet nun, dass eine Gerade a, welche in zwei Spitzen A und B einer Kurve Tangente ist, dieselbe in diesen Punkten sechsmal schneidet, obgleich hier keine a naheliegende Gerade zu finden ist, welche die Kurve in sechs A oder B naheliegenden einfachen Punkten schneidet.

Jede Kurve mit Doppelpunkten lässt sich in Pseudozweige zerlegen, welche von einem Doppelpunkt O ausgehen, indem man von O aus die Kurve soweit durchläuft, bis man wieder zu O zurückkehrt. Wenn O ein Selbstberührungspunkt ist, dann wird der Pseudozweig eine selbständige Kurve sein, und die ursprüngliche ist nach der in dieser Arbeit gebrauchten Definition reduzibel. Sonst ist der Pseudozweig keine »völligstetige« Elementarkurve, indem er in O einen Winkelpunkt hat. Den Pseudozweig kann man aber in eine völligstetige Elementarkurve umwandeln, indem man die genannten Winkelpunkte passend abrundet.

Eine ebene Kurve $n$ter Ordnung von Maximalindex hat den Index $n-2$.

Über diese Kurven hat man die folgenden leicht beweisbaren Sätze.[1]

1) Jede Tangente und jede durch eine Spitze gehende Gerade schneidet ausser in dem doppel zu rechnenden Punkt noch in $(n-2)$ Punkten. Umgekehrt ist jede Kurve, welche von den genannten Geraden ausser in dem doppel zu rechnenden Punkt noch in $(n-2)$ Punkten geschnitten wird, eine C^n von M. I.

2) Eine Kurve von M. I. kann keine doppelte Stützgerade haben. Umgekehrt ist jede irreduzible Kurve endlicher

[1] Siehe auch: Hans Mohrmann: Über algebraische und nicht algebraische gewundene Kurven n-ter Ordnung vom Maximalindex, Math. Ann., Bd. 78, S. 171.

Ordnung ohne doppelte Stützgerade von M. I., wenn noch keine Wendetangente ausserhalb des Berührungspunktes auch Stützgerade ist.

3) Wenn eine Kurve von M. I. sich in mehrere Teilkurven auflöst, dann ist jede derselben von M. I. Umgekehrt bilden zwei Kurven von M. I. eine reduzible Kurve von M. I., wenn sie keine Stützgerade gemein haben.

4) Eine ebene Kurve von M. I. muss, wenn ihre Ordnung grösser als drei ist, wenigstens einen Doppelpunkt haben.

Denken wir uns nämlich erst, dass die Kurve ohne Spitzen ist. Da sie von M. I. ist, hat man also eine Kurve ohne andere Punkt- und Tangenten-Singularitäten als Doppelpunkte und Wendetangenten. Eine solche Kurve muss aber entweder zweiter oder auch dritter Ordnung sein.[1]

Von Spitzen kann die Kurve jedenfalls nur eine haben, denn die Verbindungsgerade zweier Spitzen würde eine doppelte Stützgerade sein. Aus ebendemselben Grunde kann durch die Spitze O keine ausserhalb O berührende Tangente gehen. Rundet man also die Spitze ab, kann deshalb keine in der unmittelbaren Nähe von O berührende Doppeltangente auftreten, und die abgerundete Kurve muss dritter Ordnung sein. Das bleibt aber auch noch gültig, wenn die Abrundung aufgehoben wird.

Es mag an dieser Stelle noch bemerkt werden, dass eine Wendetangente in einem Punkt M nicht nur als eine in M berührende, sondern auch als eine durch M gehende und ausserhalb M berührende Tangent betrachtet werden soll.

Wir wollen uns jetzt an Kurven vierter Ordnung von

[1] Für n paar siehe: Ebene Elementarkurven, Kgl. Danske V. S. Skrifter 1914 S. 22; für den schwierigeren Fall n unpaar siehe: Stenfors, Ein Satz über völligstetige geschlossene Kurven, Societas scient. Fennica 1922 I, 27 S. 1.

M. I. halten. Ist die Kurve irreduzibel, dann hat sie entweder zwei oder auch drei Doppelpunkte[1]. Ist sie nicht irreduzibel, dann muss sie entweder aus zwei Kurven vierter Ordnung, oder aus zwei zweiter Ordnung, oder zwei dritter Ordnung, oder auch aus einer C^2 in Verbindung entweder mit einer C^4 oder mit einer C^3 zusammengesetzt sein.

Wir wollen diese Möglichkeiten in aller Kürze vornehmen.

Erstens sehen wir, dass zwei Kurven C_1^4 und C_2^4 nicht eine Kurve vierter Ordnung von M. I. bilden können. Die zwei Kurven müssen nämlich beide von M. I. sein, und jede Gerade muss mit einer der Kurven mindestens zwei Punkte gemein haben, auch jene, welche mit der anderen Kurve vier Punkte gemein hat.

Nehmen wir nun zwei Kurven zweiter Ordnung. Wenn diese s Punkte miteinander gemein haben, dann werden sie, wenn nicht $s = 0$ oder $s = 4$, auch s Tangenten miteinander gemein haben.[1] Wenn aber die zwei Kurven weder Punkte noch Tangenten miteinander gemein haben, muss die eine derselben ganz innerhalb der anderen liegen, und dann würde man eine Gerade finden können, welche keinen Punkt mit beiden Kurven gemein hätte. Wenn also zwei C^2 eine C^4 von M. I. bilden, müssen sie vier Punkte gemein haben. — Doppelrührung nicht ausgeschlossen.

Um klar zu machen, dass Kurven von M. I. besonderer Art existieren, ist es oft bequemer, die Existenz der entsprechenden Kurven von Max. Klassenindex nachzuweisen.[2] Durch Dualisierung erhält man dann die gesuchten Kurven von gewöhnlichem M. I.

[1] Siehe: »Indledning i Læren om grafiske Kurver«, Kgl. D. Vidensk. Selsk. Skr. 6. R. X 1899 S. 19.

[2] Hierauf hat besonders Hr. J. v. Sz. Nagy aufmerksam gemacht, siehe Math. Ann. Bd. 89 S. 32.

So sieht man gleich, dass zwei Kurven zweiter Ordnung, welche ganz auseinander liegen, eine Kurve vierter Klasse von Max. Klassenindex bilden.

Eine solche Kurve wird auch gebildet von einer Kurve vierter Klasse mit vier Spitzen und zwei Doppeltangenten in Verbindung mit einem diese im Inneren enthaltenden Oval.

Ersetzt man in der letztgenannten Figur die Kurve vierter Klasse durch eine oder zwei ganz auseinander liegenden Kurven dritter Klasse mit drei Spitzen, welche innerhalb des Ovales liegen, dann erhält man auch eine Kurve vierter Klasse von Max. Klassenindex. Dasselbe bleibt auch noch gültig, wenn man die zwei Kurven dritter Klasse beibehält, aber das Oval auslässt.

Hiermit sind die vier obengenannten Möglichkeiten alle abgetan: man kann z. B. also zwei Kurven dritter Ordnung zu einer Kurve vierter Ordnung von M. I. zusammensetzen. Von diesen kann die eine, aber auch nur die eine einen Doppelpunkt haben, denn die Verbindungsgerade zweier Doppelpunkte würde sechs Punkte mit der Kurve gemein haben.

Im folgenden haben wir mehrmals Gebrauch zu machen von einer Kurve C^2 zweiter Ordnung, welche von jedem durch einen Punkt A gehenden Kegelschnitt in höchstens vier Punkten geschnitten wird. Solche Kurven existieren auch als nicht algebraische, indem man von dem bekannten Böhmerschen Oval ausgeht.[1] Ein solches wird erstens von jeder Hyperbel, d. h. von jedem durch einen unendlich fernen Punkt A_1 gehenden Kegelschnitt in höchstens vier Punkten geschnitten. Daraus erhält man durch eine reelle projektive Transformation die gesuchte Kurve in dem Fall, dass der feste Punkt A ausserhalb C^2 liegt. Aber das Böh-

[1] Siehe P. Böhmer: »Über elliptisch-konvexe Ovale«, Math. Ann. Bd. 60. S. 256 (1905).

mersche Oval wird auch von jeder Parabel in höchstens vier Punkten geschnitten. Man erhält also durch eine dualistische Transformation des Böhmerschen Ovales auch die gesuchte Kurve in dem Fall, dass A innerhalb C^2 liegt.

Die folgende Untersuchung behandelt die Flächen von Maximalindex. Eine Fläche ist von M. I., wenn alle ihre ebenen Schnitte von M. I. sind. Flächen dieser Art hat man schon in Kegelflächen, deren Leitlinien von M. I. sind. Diese lassen wir ganz bei Seite liegen und behandeln insbesondere die irreduktiblen allgemeinen Regelflächen; nur für Flächen vierter Ordnung bestimmen wir auch die irreduktiblen.

Durch eine Gerade gehen ebensoviele Tangentenebenen an eine Regelfläche wie die Gerade Schnittpunkte mit der Fläche hat. Eine Regelfläche von maximalem Ordnungsindex ist deshalb auch von maximalem Klassenindex; und dieser Index ist $n-2$, wenn die Fläche $n$ter Ordnung ist.

§ 2.

Die aus zwei Regelflächen zweiter Ordnung gebildete Regelfläche vom Maximalindex.

Eine Regelfläche zweiter Ordnung ist notwendigerweise algebraisch, und nur solche Flächen sind also hier in Betracht zu ziehen. Die zwei Flächen F_1^2 und F_2^2 werden von einer beliebigen Ebene in Linien zweiter Ordnung geschnitten werden, und diese müssen, wenn sie nicht Gerade enthalten, vier Punkte miteinander gemein haben. Wenn aber die Flächen eine krumme Linie gemein haben, dann würde man offenbar Ebenen finden können, welche in Kurven mit nur zwei gemeinsamen Punkten schneiden. Die Flächen müssen sich also in vier Geraden schneiden und sowohl zwei Erzeuger der einen Art wie zwei Erzeuger der zweiten Art miteinander gemein haben. Wir nehmen nun zwei Kurven zweiter Ordnung C_1^2 und C_2^2, welche eine Kurve C^4 von M. I. bilden, und es seien A, B, C, D die Schnittpunkte derselben. Durch z. B. A und B legen wir im Raume (d. h. nicht in der Ebene der Kurven) zwei einander nicht schneidende Gerade, a bzw. b, und suchen, ob die zwei durch a, b und C_1^2 sowie durch a, b und C_2^2 als Leitlinien bestimmten Flächen eine Fläche von M. I. bilden können. Um die Schnittpunkte dieser Fläche mit einer beliebigen Geraden l im Raume zu konstruieren, legen wir durch a, b und l eine einfache Regelfläche — nur der Fall, dass dies tunlich ist, ist zu betrachten, denn wenn l Punkte mit a oder mit b gemein hat, ist die Sache klar. Diese Regelfläche schneidet die Ebene der gegebenen Kurven in einem durch A und B gehenden Kegelschnitt C^2, und es kommt darauf an, ob C^2 mit $C_1^2 + C_2^2$ immer wenigstens zwei Punkte gemein hat. Um dies zu untersuchen, können wir eine quadratische involutorische Transformation anwenden mit A, B und C als Hauptpunkten; durch diese möge D in D_1 übergehen. Die Kurven C_1^2 und C_2^2 gehen in zwei durch D_1 gehenden Geraden c_1 und c_2 über und C^2 in einen durch A und B gehenden Kegelschnitt C_4^2. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass C_4^2 von wenigstens einer der Geraden c_1 und c_2 geschnitten wird, ist offenbar die, dass A und B durch c_1 und c_2 getrennt sind. Kehrt man nun zur ursprünglichen Figur zurück, hat man die Bedingung, dass die Tangenten an C_1^2 und C_2^2 im Punkte C die Gerade AB in zwei Punkten schneiden, welche durch A und B getrennt sind. Nehmen wir, was noch ganz allgemein ist, C_1^2 als eine Hyperbel, C_2^2 als eine Ellipse an, dann müssen A und B in Übereinstimmung mit dem obigen als zwei solche Schnittpunkte gewählt werden, welche auf der Hyperbel durch die unendlich fernen Punkte der Hyperbel getrennt sind, und diese Bedingung ist sowohl notwendig wie auch hinreichend.

§ 3.
Die aus zwei Regelflächen dritter Ordnung gebildete Fläche vierter Ordnung von Maximalindex.

Ehe wir zu unserer eigentlichen Untersuchung übergehen, wollen wir ein paar Worte sagen über Regelflächen dritter Ordnung F^3 unabhängig davon, ob sie algebraisch oder nicht algebraisch sind. Er sei f ein allgemeiner Erzeuger der Fläche. In einem Punkt P dieser Geraden nehmen wir die berührende Ebene π, welche F^3 ausser in f noch in einer Kurve zweiter Ordnung C^2 schneidet, und diese hat ausser P noch einen Punkt Q mit f gemein. Wenn Q nicht Schnittpunkt mit einer Leitlinie ist, dann würde π eine auch im Punkt Q berührende Ebene sein. Das ist aber nicht möglich, denn der Umriss von F^3 auf eine Ebene aus einem allgemeinem Punkt von f kann als Kurve zweiter Klasse keinen Doppelpunkt (mit zusammenfallenden Tangenten) haben. Durch Q geht also eine Leitlinie α der Fläche. Jeder Erzeuger der Fläche geht durch einen Punkt von C^2, und durch P geht der Erzeuger f. Kein weiterer Erzeuger kann in π liegen, weil F^3 dritter Ordnung ist, und deshalb muss durch Q ein neuer Erzeuger f_1 gehen. Durch den beliebigen Punkt Q von α gehen also zwei Erzeuger, und α wird eine Doppellinie der Fläche sein. Aber diese Leitlinie muss geradlinig sein, denn schneidet eine Ebene eine krumme Leitlinie in A und B, dann müsste die Linie AB ganz in der Fläche liegen, was unmöglich ist, wenn A und B beliebige Punkte eines Bogens sind.

Eine Regelfläche F^3 hat also immer eine gerade Doppellinie a. Nehmen wir nun vier Erzeuger von welchen nicht zwei durch denselben Punkt von a gehen, dann können überhaupt keine zwei einander schneiden, und die vier Erzeuger werden ausser von a noch von einer anderen Geraden b geschnitten. Diese muss auf der Fläche liegen und kann nur eine einfache Leitlinie sein. Es können aber speziell a und b zusammenfallen und ein windschiefes Element der Fläche bilden.

Man erhält also eine Regelfläche dritter Ordnung allgemeinster Art, wenn man als Leitlinien nimmt: eine Kurve C^2, eine im Raume durch einen Punkt A von C^2 gehende Gerade a, und noch eine solche Gerade b, welche keinen Punkt mit C^2 gemein hat.

Eine solche Fläche existiert sowohl als algebraisch, wie auch als nicht algebraisch. Um die Schnittpunkte mit einer Geraden l im Raume zu finden, legen wir wie immer eine einfache Linienfläche durch a, b und l, und diese schneidet die Ebene π von C^2 in einem Kegelschnitt, welcher durch die Spuren A und B von a und b in π gehen. Wir brauchen also nur C^2 als ein passend transformiertes Böhmersches Oval zu nehmen.

Jede durch die doppelte Leitlinie a gehende Ebene schneidet die Fläche in einer Geraden, aber wählt man B ausserhalb C^2, dann wird nicht jede durch b gehende Ebene die Fläche in zwei Geraden schneiden. Aus B gehen dann zwei Tangenten t_1 und t_2 an C^2_2, und die Ebenen (bt_1) und (bt_2) trennen jene durch b gehenden Ebenen, welche ausser in b in zwei Geraden schneiden, von jenen anderen, welche ausser b keinen Punkt mit der Fläche gemein haben.

Die Ebenen (bt_1) und (bt_2) schneiden a in zwei Punkten S_1 und S_2, durch welche zusammenfallend Erzeuger gehen. Diese Punkte, die pinch-points oder Grenzpunkte auf

a, zerlegen diese Gerade in zwei Strecken; nur die eine der Strecken ist eine eigentliche Doppellinie der Fläche.

Wir wollen nun dazu übergehen, zu untersuchen, ob es möglich ist, zwei Regelflächen dritter Ordnung F_1^3 und F_2^3 zu einer Fläche vierter Ordnung von M. I. zusammenzusetzen. Die zwei Flächen können nun jedenfalls keine krumme Linie miteinander gemein haben; eine durch zwei Punkte A und B dieser Kurve gehende Ebene würde in zwei Kurven dritter Ordnung schneiden, welche A und B mit einander gemein haben, so dass AB der Fläche angehören müsste, wenn $F_1^3 + F_2^3$ vierter Ordnung sein soll. Es haben aber die zwei Flächen in jeder Ebene Punkte miteinander gemein, d. h. sie müssen sich also notwendigerweise in Geraden schneiden.

Es ist nun ferner erstens nicht möglich, dass eine Schnittgerade ein gemeinsamer Erzeuger f sein kann, denn jede durch f gehende Ebene wird beide Flächen in (reellen) Kurven zweiter Ordnung schneiden. Es ist auch nicht möglich, dass eine Schnittgerade auf der einen Fläche eine Doppelgerade und auf der anderen eine einfache Leitlinie oder auch ein Erzeuger ist, denn auch in dem Fall wird man durch die Gerade gehende Ebenen finden können, in welchen Gerade liegen, die mit $F_1^3 + F_2^3$ mehr als vier Punkte gemein haben.

Eine durch keine Gerade der Flächen gehende Ebene schneidet dieselben in zwei C^3. Von diesen kann wie früher gesagt höchstens die eine einen Doppelpunkt haben. Die Flächen müssen deshalb notwendigerweise die Doppellinie a gemeinsam haben, und zwar so, dass die eigentlichen Doppelstrecken von a, je nachdem man a als eine Doppellinie der einen oder der anderen Fläche auffasst, keinen Punkt miteinander gemein haben. Eine beliebige durch a

gehende Ebene schneidet jede der Flächen in einem Erzeuger, und durch den Schnittpunkt derselben muss eine gemeinsame einfache Leitlinie gehen, d. h. die Flächen müssen sowohl die Doppelline a wie auch die einfache Leitlinie b miteinander gemein haben.

Nachdem wir nun die einzig mögliche Zusammenstellung von F_1^3 und F_2^3 festgestellt haben, kann man in der früheren Weise die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden l mit $F_1^3 + F_2^3$ bestimmen. Eine durch a, b und l gehende einfache Regelfläche schneidet die Ebene von $C_1^3 + C_2^3$ in einem durch die Spuren A und B von a und b gehenden Kegelschnitt, und es kommt darauf an, ob ein beliebiger durch A und B gehender Kegelschnitt ausserhalb A und B die Kurve $C_1^3 + C_2^3$ in höchstens vier und wenigstens zwei Punkten schneidet.

Wir können leicht zwei solche Kurven bestimmen, wenn wir von einer algebraischen zweiteiligen Kurve C^3 ausgehen. Wir brauchen nur eine quadratische involutorische Transformation zu applizieren mit dem einen Hauptpunkt A auf dem Oval, dem zweiten B auf dem unpaaren Zweig der Kurve, während der dritte C beliebig innerhalb des Ovales gewählt wird, nur nicht in der Geraden AB. Dadurch geht das Oval in eine Kurve dritter Ordnung C_1^3 über, welche in A einen Doppelpunkt hat, und der unpaare Zweig von C^3 geht in eine andere Kurve C_2^3 über, welche nicht durch A, wohl aber wie auch C_1^3 durch B geht. Es ist klar, dass jeder durch A und B gehende Kegelschnitt die Kurve $C_1^3 + C_2^3$ ausserhalb A und B in höchstens vier und mindestens zwei Punkten schneidet.

Die konstruierte Fläche ist algebraisch, aber die zwei Flächen F_1^3 und F_2^3 sind nicht-algebraische Flächen dritter Ordnung.

§ 4.

Die Regelfläche vierter Ordnung von Maximalindex mit einer dreifachen Leitlinie.

Betrachten wir nun eine nicht zerfallene Regelfläche F^4 vierter Ordnung, und es sei f ein allgemeiner Erzeuger derselben. Eine durch f gehende Ebene π schneidet F^4 ausser in f noch in einer Kurve dritter Ordnung C^3, und diese schneidet f in einem oder in drei Punkten. Von diesen muss der eine ein Berührungspunkt von π mit F^4 sein, die zwei vom Berührungspunkt verschiedene Schnittpunkte von f mit mehrfachen Leitlinien.

Wenn nun die Fläche eine dreifache Leitlinie haben soll, dann muss C^3 einen auf f liegenden Doppelpunkt A haben können, und die Punkte A die dreifache Leitlinie bilden. Diese muss eine Gerade sein, denn jede Verbindungsgerade zweier Punkte derselben, durch welche drei Erzeuger gehen, muss der Fläche angehören, weil diese vierter Ordnung ist.

Durch jeden Punkt der dreifachen Leitgerade a gehen entweder drei oder auch nur ein Erzeuger, weil Grenzpunkte vorhanden sein könten. Das letztere ist aber unmöglich. Wenn nämlich durch einen Punkt A von a nur ein Erzeuger f geht, dann wird eine durch A gehende und f und a nicht enthaltende Ebene in einer Kurve C^4 ohne Doppelpunkte schneiden, weil F^4 ausser a keine andere mehrfache Leitlinie haben kann. C^4 kann also nicht von M. I. sein (siehe S. 8).

Die drei durch einen Punkt von a gehenden Erzeuger müssen in einer Ebene liegen.

Legt man nämlich durch zwei derselben, sagen wir a_1 und a_2, eine Ebene, wird diese, wenn nicht alle drei in einer Ebene liegen, die Fläche noch in einer Kurve zweiter

Ordnung schneiden, welche durch den Punkt $(a_1 a_2)$ geht und demnach jede der Geraden a_1 und a_2 in noch einem Punkt bzw. A_1 und A_2 schneidet. Diese Punkte sind Berührungspunkte der Fläche mit der Ebene $(a_1 a_2)$, und die Gerade $A_1 A_2$ würde eine Doppeltangente der Fläche sein, denn $A_1 A_2$ kann kein Erzeuger sein, weil die Fläche vierter Ordnung ist. Es müssen also alle die drei durch einen Punkt der Doppellinie gehenden Erzeuger in einer Ebene liegen, und diese wird die Fläche noch in einer einfachen Geraden b schneiden. Jede durch b gehende Gerade schneidet noch in einer C^3 mit einem dreifachen Punkt also in drei Geraden; die Ebene berührt freilich auch dann die Fläche dreimal, aber die Verbindungslinie zweier Berührungspunkte ist eine Gerade der Fläche.

Es fragt sich nun, ob eine solche F^4 auch wirklich von M. I. sein wird. Um dies zu untersuchen, bemerken wir, dass wenn wir durch einen Erzeuger f eine Ebene μ legen, diese F^4 ausser in f noch in einer C^3 schneidet, welche in $A = (\mu a)$ einen Doppelpunkt hat. Nehmen wir nun in einer Ebene eine C^3 mit Doppelpunkt in A. Durch A sowie durch einen Punkt B in der Ebene von C^3, aber ausserhalb dieser Kurve, legen wir im Raume zwei Gerade, b. z. w. a und b; die Fläche wird dann als eine Regelfläche mit a und b als Leitlinien bestimmt. Hier sehen wir nun sogleich, dass B innerhalb des Ovales von C^3 gewählt werden muss; sonst würde man aus B eine Tangente t an C^3 legen können, und die Ebene (bt) würde a in einem Grenzpunkt treffen, während doch a keinen solchen Punkt enthalten darf.

Diese Bedingung ist aber auch hinreichend, wenn nur die Regelfläche vierter Ordnung ist. Legen wir nämlich durch A und B einen beliebigen Kegelschnitt c. Wenn dieser mit dem Oval in A einen zweifach zu rechnenden Punkt gemein hat, dann wird er wenigstens zwei einfache Punkte mit dem Oval gemein haben, und hat er in A einen einfachen Punkt mit dem Oval gemein, dann wird er auch in A einen einfachen Punkt mit dem unpaaren Pseudozweig von C^3 gemein haben, so dass er in jedem Fall wenigstens zwei Punkte mit C^3 gemein haben wird.

Wenn C^3 algebraisch ist, dann ist es klar, dass C höchstens vier Punkte mit C^3 gemein hat. Aber dasselbe kann auch der Fall sein, wenn C^3 nicht algebraisch ist, indem man nämlich in früher angegebener Weise von einem Böhmeschen Oval den Ausgangspunkt nimmt.

Wir haben also:

Eine Fläche vierter Ordnung mit einer dreifachen Leitlinie ist von Maximalindex, wenn die drei durch einen Punkt der Leitlinie gehenden Erzeuger in einer Ebene liegen und diese Leitlinie keine Grenzpunkte hat.

§ 5.

Die Regelfläche vierter Ordnung von Maximalindex mit zwei Leitlinien.

Wir wollen nun eine Regelfläche F^4 von M. I. ohne dreifache Leitlinie betrachten. Eine durch einen Erzeuger f gehende Ebene μ schneidet ausser in f noch in einer Kurve C^3, welche durch den Berührungspunkt M von μ mit der Fläche geht. Ausser M muss f noch zwei getrennte oder zusammenfallende Punkte mit C^3 gemein haben, denn M als einziger Schnittpunkt ist unmöglich. Aus dem Punkt M darf nämlich keine Tangente an C^3 gehen, welche ausserhalb M berührt, denn eine solche würde eine Doppeltangente der Fläche sein. Deshalb muss M entweder auf einem Oval von C^3 liegen oder auch muss diese Kurve einen Doppelpunkt haben, und M auf der Schleife derselben liegen. Die erstere Möglichkeit ergibt aber, dass die Fläche F^4 reduzibel ist, — wir kommen in der Tat zu der in zwei Flächen dritter Ordnung zerlegbaren F^4 zurück — und jede durch einen Punkt der Schleife gehende und in μ liegende Gerade hat drei Punkte mit der Kurve C^3 gemein. Die zwei von M verschiedenen Punkte bilden, wenn f sich stetig ändert, die Leitlinien, und zwar doppelte Leitlinien der Fläche. Wir sehen also, dass jeder Erzeuger die Leitlinie — oder, wenn man will, das Leitliniensystem — in zwei Punkten schneidet.

Nehmen wir nun einen Punkt A der Leitlinie, durch den zwei Erzeuger f_1 und f_2 gehen. Weil die Fläche nicht abwickelbar ist, können wie A so gewählt denken, dass f_1 und f_2 nicht zusammenfallen, und es mögen diese Geraden das Leitliniensystem das zweite Mal in B_1 bzw. B_2 schneiden. Weil die Fläche nicht abwickelbar ist, können wir auch voraussetzen, dass f_1 und f_2 nicht in B_1 bzw. B_2 die dortige Leitlinie β berühren.

Die Ebene $(f_1 f_2)$ schneidet die Fläche ausser in f_1 und f_2 noch in einer durch B_1 und B_2 gehenden Kurve C^2 zweiter Ordnung. Wir können voraussetzen, dass diese Kurve — wenn sie eine krumme Linie ist — weder f_1 in B_1 noch f_2 in B_2 berührt. Wenn nämlich C^2 in B_1 den Erzeuger f_1 berührte, dann würden die zwei Ebenen, welche in B_1 die Fläche berühren, zusammenfallen, weil f_1 wie oben bemerkt keine Tangente an der Doppelkurve β ist. Eine durch B_1 gehende (aber nicht β in B_1 berührende) Ebene würde dann F^4 in einer Kurve mit einer Spitze in B_1 schneiden. Dies kann einmal geschehen, aber — wenn die ganze Leitlinie nicht geradlinig ist — auch nur einmal, weil man sonst eine Schnittkurve mit zwei Spitzen haben könnte, was nicht angeht, wenn F^4 von M. I. ist.

Wenn aber die krumme Linie C^2 weder f_1 in B_1 noch f_2 in B_2 berührt, dann muss sie f_1 in einem neuen Punkt C_1 und f_2 in einem neuen Punkt C_2 schneiden. Aber dann würde $(C_1 C_2)$ eine doppel berührende Tangente an F^4 sein, was nicht angeht. Die Kurve C^2 muss deshalb zerfallen, und zwar in die Gerade $B_1 B_2$ als Doppellinie.

Aus alle dem folgt, dass man immer einen Punkt A so wählen kann, dass die durch die zwei durch A gehenden Erzeuger f_1 und f_2 gehende Ebene μ ausser in f_1 und f_2 nur noch in einer doppelten Linie $B_1 B_2 = b$ schneidet. Aber dann wird jede durch b und einen beliebigen anderen nicht in b liegenden Punkt A der Leitlinien gehende Ebene die Fläche in zwei Geraden schneiden. Aber ebenso wird man sehen, dass alle von einem Punkt von b ausgehenden Erzeuger eine Gerade a schneiden, d. h.:

Die Fläche muss zwei Gerade als doppelte Leitlinien haben.

Aber nicht jede Regelfläche vierter Ordnung dieser Art ist von M. I. Wir fügen zugleich die folgende Forderung hinzu:

Höchstens auf einer der Leitgeraden können pinch-points — oder Grenzpunkte — liegen, wenn die Fläche von M. I. sein soll.

Ein Grenzpunkt ist ein Punkt auf einer Leitlinie, welcher zwei Teile derselben trennt; aus Punkten des einen Teiles gehen zwei Erzeuger mehr als aus einem Punkt des anderen; aus dem Grenzpunkt geht — ausser einfach zu rechnenden Erzeugern — immer eine mehrfach zu rechnender. Die Zahl der Grenzpunkte muss paar sein.

Ist in unserem Fall A_1 ein Grenzpunkt z. B. auf der Linie a_1 dann gehen aus einem in der Nähe von A_1 liegenden Punkt P zwei Erzeuger oder auch keine, jenachdem P auf der einen oder auf der anderen Seite von A_1 liegt.

Denken wir uns nun, dass es solche Grenzpunkte gibt, sowohl auf a wie auf b. Durch a legen wir eine Ebene μ, welche b in einem Punkt schneidet, aus welchem kein Erzeuger geht. Die Ebene hat dann ausser a keinen Punkt mit der Fläche gemein. Eine in μ liegende Gerade, welche durch einen Punkt von a geht, aus dem kein Erzeuger geht, wird also keinen Punkt mit F^4 gemein haben, so dass die Fläche nicht von M. I. sein kann.

Weil die Leitlinien a und b nicht in einer Ebene liegen, können zwei Erzeuger sich nur in einem Punkt dieser Linien schneiden. Die Fläche kann deshalb ausserhalb der Leitlinien keine andere Doppellinie haben als ein doppelter Erzeuger; dass zwei solche in der irreduktiblen F^4 unmöglich sind, ist ersichtlich. Man hat nun:

Eine Regelfläche vierter Ordnung mit zwei geraden (doppelten) Leitlinien und keinem doppelten Erzeuger kann nicht von M. I. sein.

Legt man nämlich durch einen Erzeuger f eine Ebene μ, dann schneidet sie in diesem Fall ausser in f noch in einer Kurve C^3 dritter Ordnung ohne Doppelpunkt, welche durch die Schnittpunkte A und B von μ mit den Leitlinien geht. Aber aus A gehen dann immer wenigstens zwei Tangenten an C^3, welche ausserhalb A berühren. Die durch diese Tangenten und a gehenden Ebenen bestimmen Grenzpunkte auf b. Ebenso kann man Grenzpunkte auf a bestimmen. Dem vorigen Satz zufolge kann F^4 also nicht von M. I. sein.

Wenn die Fläche einen doppelten Erzeuger hat, ist es einfacher, die Schnittebene μ durch den doppelten Erzeuger g zu legen. Die Ebene schneidet dann ausser in g noch in einer Kurve zweiter Ordnung C^2. Die Schnittpunkte A und B von μ mit a und b liegen nicht auf C^2, sie können entweder beide ausserhalb C^2 oder beide innerhalb C^2 liegen, oder auch kann der eine ausserhalb, der andere innerhalb C^2 liegen.

Im ersten Fall kann die Fläche nicht von M. I. sein, denn die Tangenten an C^2 aus A und B ergeben Grenzpunkte auf b bzw. a. Im zweiten Fall gibt es weder Grenzpunkte auf a noch auf b. Aber die Fläche kann dennoch nicht von M. I. sein. Es kommt ja wie oft bemerkt darauf an, ob jeder durch A und B gehende Kegelschnitt ausserhalb A und B wenigstens zwei Punkte mit C^2 gemein hat. Wenn aber A und B beide innerhalb C^2 liegen, dann wird ein Geradenstück AB auch innerhalb C^2 liegen, und ein diesem doppelgerechneten Geradenstück hinreichend nahe liegender Kegelschnitt wird keinen Punkt mit C^2 gemein haben. Wenn aber A und B auf verschiedenen Seiten von C^2 liegen, dann wird jeder durch A und B gehende Kegelschnitt wenigstens zwei Punkte mit C^2 gemein haben. Wenn wir also im voraus wissen, dass die Fläche vierter Ordnung ist, dann hat man:

Eine Regelfläche vierter Ordnung mit zwei geraden Leitlinien und einem doppelten Erzeuger ist von Maximalindex dann und nur dann, wenn sich auf einer und nur einer der Leitlinien Grenzpunkte finden.

Dass Flächen dieser Art, sowohl algebraische wie auch nicht algebraische existieren, ist leicht zu sehen. Man braucht ja nur eine Kurve C^2 zweiter Ordnung herzustellen, welche von jedem durch einen ausserhalb C^2 liegenden Punkt A in höchstens vier Punkten geschnitten wird (siehe § 1). Wählt man dann einen beliebigen Punkt B innerhalb C^2

und sind a und b zwei durch A bzw. B gehende Gerade, welche nicht in der Ebene von C^2 liegen, dann bestimmen a, b und C^2 als Leitlinien die gesuchte F^4 von M. I.

Wir wollen zum Schluss noch die restierende formal möglichen Zusammensetzungen von Regelflächen zu einer Fläche vierter Ordnung von M. I. kurz in Betracht ziehen. Diese erweisen sich alle als ausgeschlossen.

Erstens kann man nicht zwei Flächen vierter Ordnung zu einer F^4 von M. I. zusammenstellen, denn die ebenen Schnitte von F^4 können nicht von M. I. sein (siehe § 1).

Dasselbe gilt auch für eine F^4 in Verbindung mit einer F^2. Man braucht, um das zu sehen, nur eine Ebene durch einen Erzeuger der Fläche zweiter Ordnung und einen Punkt der Leitlinie der F^4 — durch den zwei Erzeuger gehen — zu legen. Diese schneidet $F^4 + F^2$ in einer Kurve vierter Ordnung in Verbindung mit zwei Geraden, und diese Schnittkurve kann nicht vierter Ordnung sein.

In ganz derselben Weise sieht man, dass eine F^3 in Verbindung mit einer F^2 fünfter Ordnung sein wird. Um so mehr können also zwei F^3 und eine F^2 keine Fläche vierter Ordnung bilden.

Wir haben also in der Tat im obigen alle reduktiblen und irreduktiblen Regelflächen vierter Ordnung von Maximalindex gefunden.

§ 6.

Regelflächen n-ter Ordnung von Maximalindex.

Die Flächen, welche wir hier in Betracht ziehen, müssen völlig stetig sein (sowohl als Punkt- wie als Ebenengebilde); auch setzen wir voraus, dass die Fläche nicht unbegrenzt viele mehrfach zu rechnende Erzeuger hat. Noch machen wir die sehr wesentliche Veraussetzung, dass die Fläche sich nicht in verschiedene Blätter zerlegen lässt, was nicht damit äquivalent ist, dass die Fläche, wenn algebraisch, auch algebraisch irreduktibel ist. Aber es folgt daraus, weil die Fläche eine Regelfläche ist, dass eine ebene Schnittkurve derselben sich nur dann in getrennte Zweige zerlegen lässt, wenn die Kurve aus einer Leitlinie und übrigens nur Erzeugern zusammengesetzt ist.

Durch einen einfach zu rechnenden Erzeuger f legen wir eine Ebene, welche die Fläche F^n ausser in f noch in einer C^{n-1} von M. I. schneidet. Diese hat Punkte mit f gemein, nämlich $n-1$ oder $n-3$ getrennte oder zusammenfallende Punkte. Von diesen kann nur ein Punkt ein Berührungspunkt von π mit F^n sein. Die übrigen müssen Schnittpunkte mit einer mehrfachen Leitlinie sein. Durch wenigstens einen Punkt von f geht also jedenfalls eine Leitlinie. Dass diese eine Gerade sein muss, könnten wir wesentlich wie im vorigen § dartun, ziehen es aber vor, sogleich den folgenden allgemeinen Satz aufzustellen, der für alle Flächen von M. I. Bedeutung hat:

Jede Doppellinie und allgemeiner jede mehrfache Linie einer Fläche von Maximalindex muss aus Geraden zusammengesetzt sein.

Es sei t eine Tangente einer als nicht geradlinig vorausgesetzten Doppellinie. Durch eine Gerade l, welche t schneidet, aber nicht durch deren Berührungspunkt M geht, legen wir Ebenen μ. Weil wir voraussetzen können, dass t kein Erzeuger ist, dass M ein gewöhnlicher Punkt der Doppelkurve, und dass (lt) keine dieselbe in M oskulierende Ebene ist, wird die Schnittkurve der Fläche mit der Ebene (lt) in der Nähe von M aus zwei Elementarbögen zusammengesetzt sein, welche t als gemeinsame Tangente haben.

Wir betrachten nun zwei durch l gehende Ebenen, welche beide in der Nähe von (lt) liegen, aber durch diese getrennt sind. Die eine der Ebenen schneidet die Doppelkurve in zwei in der Nähe von M liegenden Punkten und also die Fläche in der Nähe von M in zwei Elementarbögen, welche sich in den genannten zwei Punkten schneiden. Die andere Ebene schneidet in der Nähe von M in zwei Elementarbögen, welche keinen Punkt miteinander

Fig. 1.

Fig. 2.

gemein haben. Aber eine Figurenbetrachtung zeigt dann, dass in einer der Ebenen Doppeltangenten auftreten, und das ist für eine Fläche von M. I. nicht zulässig (siehe Fig. 1 und 2). Dass die Doppelkurve eine Spitzkante der Fläche sein kann, ist ausgeschlossen.

Der Satz bleibt auch noch gültig, wenn in der Doppellinie sich mehrere Blätter der Fläche schneiden.

Durch eine jetzt nachgewiesene Leitgerade, wir nennen sie a, legen wir eine Ebene π. Diese hat ausser a noch Punkte mit F^n gemein, welche eine Kurve C bilden. Alle Erzeuger müssen entweder a oder auch C treffen, wenn nicht C aus lauter Erzeugern zusammengesetzt ist. Das letztere muss aber der Fall sein, weil wir ausdrücklich daran festhalten, dass unsere Fläche unzerlegbar sein soll; sonst würden jene Erzeuger, welche a treffen, einen Teil, und jene, welche C treffen, einen anderen Teil von F^n bilden.

Wir haben also gesehen, dass die Fläche eine Gerade a haben muss mit der Eigenschaft, dass jede durch a gehende Ebene μ, welche ausserhalb a Punkte mit der Fläche gemein hat, dieselbe in Erzeugern schneidet, so dass man dadurch alle Erzeuger der Fläche erhält. Es ist nicht abgemacht, dass durch jeden Punkt von a Erzeuger gehen.

Aber die Fläche muss noch eine andere Leitlinie b haben. Eine Fläche von Maximalindex ist ja auch von Maximalklassenindex, und muss demnach eine Gerade b enthalten mit den analogen Eigenschaften: dass durch die in b liegenden Punkte Erzeuger gehen, so dass man dadurch alle Erzeuger der Fläche erhält. Es ist nicht abgemacht, dass jede durch b gehende Ebene ausser b noch Punkte mit F^n gemein hat. Den Fall, dass a und b zusammenfallen, so dass sie ein windschiefes Element bilden, betrachten wir als einen Grenzfall.

Wir legen nun eine Ebene π, welche keinen Erzeuger enthält, und a und b in A bzw. B schneidet; die Fläche schneidet sie in einer Kurve C^n von M. I. Man erhält alle Erzeuger, wenn man durch a eine Ebene μ legt, welche b in N und C^n in $M_1, M_2 \ldots$ schneidet, wonach $NM_1, NM_2 \ldots$ die in μ liegenden Erzeuger sind. Weil jede durch A gehende und in π liegende Gerade die Kurve C^n ausser in A noch in, sagen wir p oder $p-2$ Punkten schneidet, werden durch jeden Punkt von b entweder p oder $p-2$ Erzeuger gehen. Wenn diese Möglichkeiten beide eintreffen können, wird jedes Geradenstück $B_1 B_2$ von b, durch dessen Punkte p Erzeuger gehen, von einem Nachbarstück $B_2 B_3$, durch dessen Punkte $p-2$ Erzeuger gehen, durch einen pinch-point B_2 getrennt sein. Wir wollen nun zeigen, dass wenn sich ein solcher Punkt auf b findet, dann a jedenfalls keinen pinch-point enthalten kann. Denken wir uns nämlich, dass durch jeden Punkt B' von B_1B_2 p Erzeuger gehen, durch jeden Punkt B'' von B_2B_3 $p-2$ Erzeuger und weiter durch einen Punkt A' in einer Strecke A_1A_2 von a q Erzeuger und durch einen Punkt A'' einer Strecke A_2A_3 $q-2$ Erzeuger. Es möge die Gerade A_2B_2 die Fläche ausser in diesen Punkten noch in, sagen wir t Punkten schneiden. Eine A_2B_2 hinreichend naheliegende Gerade, welche a und b schneidet, wird dann ausserhalb dieser Geraden auch t Punkte mit der Fläche gemein haben. Aber von diesen naheliegenden Geraden, wird eine Gerade $A'B'$ und eine Gerade $A''B''$ mit der Fläche eine Zahl von Punkten gemein haben, deren Differenz 4 ist, und das geht nicht für eine Fläche von M. I.

Pinch-points auf b liegen in Ebenen, welche durch a gehen und die Kurve C^n berühren; entsprechend werden eventuell pinch-points auf a bestimmt. Hieraus folgt, dass höchstens aus einem der Punkte A und B Tangenten an C^n gehen, welche ausserhalb A bzw. B berühren. Wir bemerken, dass wenn z. B. A ein Inflexionspunkt auf einem der durch A gehenden Bögen von C^n ist, dann die Wendetangente in A den ausserhalb A berührenden Tangenten zugerechnet werden soll.

Nehmen wir nun an, dass durch B keine Tangente an C^n geht, welche ausserhalb B berührt. Dann wird jede durch B gehende Gerade eben n Punkte (und nicht $n-2$) mit der Kurve gemein haben, denn dies ist der Fall für eine in B berührende Gerade; jede Tangente an C^n schneidet nämlich in n Punkten, wenn der Berührungspunkt mit ihrer Multiplizität mitgerechnet wird.

Die Gerade AB hat ausserhalb A und B keinen Punkt mit der Kurve gemein, denn ein solcher Punkt würde die Gerade AB als einen Erzeuger erweisen, während wir vorausgesetzt haben, dass die Ebene π von C^n keinen Erzeuger enthält.

Wenn nun A auf der Kurve die Multiplizität r, und B die Multiplizität s hat, dann muss man also haben

$$r + s = n.$$

Es fragt sich nun, ob r und s alle mit dieser Bedingung verträglichen Werte annehmen können. Wir wissen in diesem Augenblick nur, dass es die zwei Möglichkeiten gibt: entweder gehen aus den zwei Punkten A und B keine Tangenten an C^n, oder auch aus dem einen Punkt, sagen wir A, Tangenten, während aus B keine Tangente an C^n geht.

Wir wollen erst die letztere Möglichkeit in Betracht ziehen. Es kommt hierbei, wie wir fortwährend erörtert haben, darauf an, die Kurve C^n so zu bestimmen, dass sie von jedem durch A und B gehenden Kegelschnitt in höchstens n und mindestens $n-2$ Punkten geschnitten wird.

Eine durch A gehende Tangente möge einen Bogen α der Kurve in einem Punkt M berühren. Wir wollen nun den Nachweis führen, dass diese Tangente ausserhalb A und M keinen weiteren Punkt mit der Kurve gemein haben kann, wenn C^n von M. I. ist. Denken wir uns nämlich, N sei ein weiterer Schnittpunkt. Die Gerade BN schneidet überall, und die Gerade AN ausserhalb M, die Kurve unter einem endlichen Winkel — vorausgesetzt, dass überhaupt neue Schnittpunkte auftreten. Daraus folgt, dass, wenn man das Geradenpaar $(AN \cdot BN)$ durch eine Hyperbel ersetzt, welche dem Geradenpaar hinreichend nahe liegt, dann diese mit der Kurve ebensoviele Punkte gemein hat, wie das Geradenpaar, wenn man, wohl zu bemerken, nur jene Punkte in Betracht zieht, welche nicht in unmittelbarer Nähe von M und N liegen.

Wir betrachten nun die Kegelschnitte, welche durch A, B und N gehen und zugleich in dem letztgenannten Punkt die Kurve berühren. Jeder solche Kegelschnitt wird durch einen neuen fünften Punkt M_1 bestimmt. Wählt man diesen in AN — ausserhalb A und N — erhält man das oben genannte Geradenpaar; wählt man M_1 hinreichend nahe an AN — nicht in unmittelbarer Nähe von A und N — erhält

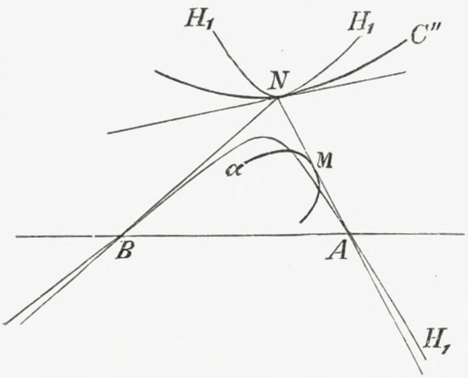

Fig. 3.

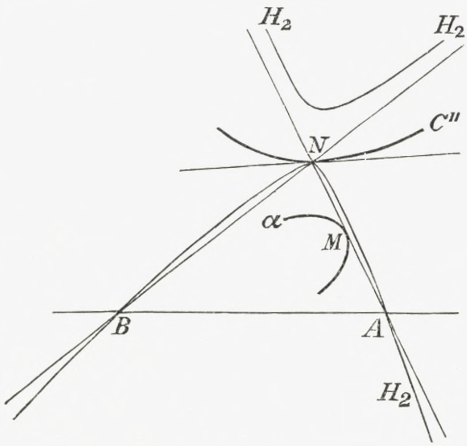

Fig. 4.

man eine dem Geradenpaar beliebig nahe liegende Hyperbel. Wir wählen nun M_1 auf dem Kurvenbogen α und nahe an M (siehe Fig. 3). Die hierdurch bestimmte Hyperbel H_1 muss dann noch einen in der Nähe von M liegenden Punkt mit dem Bogen α gemein haben und hat also in der Nähe von M und N mit der Kurve vier Punkte gemein, von welchen zwei in N fallen.

Wählen wir aber M_1 wieder in der Nähe von M, aber jetzt so, dass M_1 und der Kurvenbogen α auf verschiedenen Seiten von AN liegen, dann erhält man eine Hyperbel H_2, welche in der Nähe von M keinen Punkt mit der Kurve gemein hat. Die Hyperbel berührt die Kurve in N, aber man kan H_2 in einen Büschel, mit A und B als zwei der

Basispunkte, einlegen und in diesem Büschel eine neue Hyperbel H_2' bestimmen, welche H_2 beliebig nahe liegt, und welche weder in der Nähe von M noch in der Nähe von N Punkte mit der Kurve gemein hat (siehe Fig. 4).

Die eine der zwei gefundenen Hyperbeln schneidet also in vier Punkten mehr als die andere, was unmöglich ist, wenn jeder durch A und B gehende Kegelschnitt die Kurve in n oder in $n-2$ Punkten schneiden soll.

Wenn also die Kurve C^n die verlangte Eigenschaft haben soll, dann kann ein Punkt N gar nicht vorkommen, d. h. es muss A ein mehrfacher Punkt von der Ordnung $n-2$ und B deshalb ein gewöhnlicher Doppelpunkt sein.

Wir bemerken noch, dass aus A eben zwei Tangenten t_1 und t_2 gehen, welche ausserhalb A berühren. Eine Gerade m, welche A mit einem Kurvenpunkt M_1 verbindet, schneidet nämlich noch in einem und nur einem Punkt M_2, und die Verhältnisse in der Nähe eines Berührungspunktes (oder einer Spitze) M ergeben, dass M_1 und M_2 in entgegengesetztem Sinn auf C^n laufen; M_1 und M_2 werden deshalb zweimal zusammenfallen, d. h. auf der doppelten Leitlinie der Fläche finden sich zwei pinch-points. Diese Punkte sind die Schnittpunkte von b mit den Ebenen (at_1) und (at_2).

Jetzt können wir den umgekehrten Satz aufstellen:

Jede Regelfläche n-ter Ordnung mit einer $(n-2)$-fachen und einer doppelten Leitgeraden ist, wenn die letztere zwei Grenzpunkte, die erstere aber keine solche hat, immer von Maximalindex.

Die zwei Grenzpunkte auf der doppelten Leitlinie b zerlegen diese in zwei Strecken; durch einen Punkt der einen Strecke gehen zwei, aus einem Punkt der anderen kein Erzeuger. Wir legen nun durch eine beliebige Gerade l eine

Ebene μ, welche b in einem Punkt B schneidet, durch den kein Erzeuger geht. Die Schnittkurve von μ mit der Fläche F^n hat im Schnittpunkt A mit der anderen Leitlinie a einen $(n-2)$-fachen Punkt, sie geht aber nicht durch B; wir wissen nur, dass aus B keine Tangenten an C^n gehen. Wir zerlegen nun die Kurve in Pseudozweige φ, welche von A ausgehen. Jede von diesen wird unpaar sein. Die Gerade BA hat nämlich ausserhalb A und B keine Punkte mit C^n gemein, und sie kann in A an einem Zweig φ keine Stützgerade sein; aus B gehen nämlich keine Tangenten an φ, und die Zahl der aus einem Punkt an einen Zweig gehenden Stützgeraden muss paar sein. Die Gerade BA schneidet also φ in einem und nur einem einfach zu zählenden Punkt A, so dass φ unpaar sein muss. Die Kurve C^n ist also aus $n-2$ von A ausgehenden unpaaren Pseudozweigen zusammengesetzt und hat also mit jeder Geraden mindestens $n-2$ Punkte gemeinsam.

Wir haben nun zweitens die Möglichkeit in Betracht zu ziehen, dass weder aus A noch aus B Tangenten an C^n gehen, welche ausserhalb A und B berühren (womit auch ausgeschlossen werden soll, dass eine in A oder in B berührende Tangente eine Wendetangente ist). Jede durch A gehende Gerade m schneidet, wie wir gesehen haben, in $n-r=s$ Punkten ausserhalb A (wobei ein Nachbarpunkt zu A als ein von A verschiedener Punkt betrachtet werden soll). Schneidet m die Kurve in $M_1, M_2 \ldots M_s$, dann müssen alle diese Punkte auf C^n in demselben Sinn laufen, denn teils kann die Anzahl nicht geändert werden, teils können zwei derselben nicht zusammenfallen.

Wir wollen erst nachweisen dass C^n ausserhalb A und B keine Doppelpunkte haben kann. Nehmen wir nämlich an, dass C^n in C einen Doppelpunkt hat.

Wenn dann ein Punkt M_1 in einem bestimmten Sinn einen der durch C gehenden Bögen durchlaüft, dann müssen der obigen Bemerkung zufolge die gegen C laufenden Schnittpunkte, M' und M'', der Geraden AM_1 und BM_1 mit dem anderen durch C gehenden Bogen beide in demselben Sinn laufen; das analoge würde auch gelten, wenn C ein mehrfacher Punkt wäre. Das fordert aber, dass die Punkte A und B nicht durch die Tangenten in C getrennt sind (siehe Fig. 5). Wir können nun, ohne die Allgemeinheit einzuschränken, annehmen, dass die Schnittpunkte P und Q der Tangenten in C mit der Geraden AB auf der endlichen Strecke AB liegen, und es mögen die Punkte $APQB$ eine Folge bilden. Wir nehmen nun zwei Punkte A' und B', welche A und B beliebig nahe, und zugleich auf den Strecken AP bzw. QB liegen, und bestimmen eine durch A und B gehende Hyperbel H', welche CA' und CB' als Asymptoten hat, und also diesen Geraden beliebig nahe liegt. Diese Hyperbel hat in unmittelbarer Nähe von C keine Punkte mit C^n gemein und sonst ausserhalb A und B nur Punkte, welche den Schnittpunkten von C^n mit dem Geradenpaar (CA CB) beliebig nahe liegen (siehe Fig. 6).

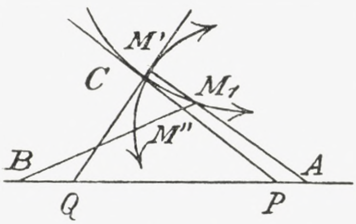

Fig. 5.

Wir können aber auch zwei andere Punkte A'' und B' nehmen, welche A und B beliebig nahe liegen, jedoch nicht auf den Strecken AP und QB. Eine durch A und B gehende Hyperbel H'' mit CA'' und CB'' als Asymptoten hat in unmittelbarer Nähe von C 4 Punkte mit C^n gemein, und sonst ausserhalb A und B nur Punkte, welche den Schnittpunkten von C^n mit H' beliebig nahe liegen (siehe Fig. 7).

Die Kegelschnitte H' und H'' haben also Punkte mit

C^n gemein, deren Anzahl um 4 differieren, was nicht zulässig ist. Wir haben also gefunden, dass unsere Leitkurve C^n ausserhalb A und B keine Doppelpunkte haben kann.

Die Punkte A und B sind mehrfache Punkte von den Ordnungen r bzw. s, wo $r+s=n$, und wir denken

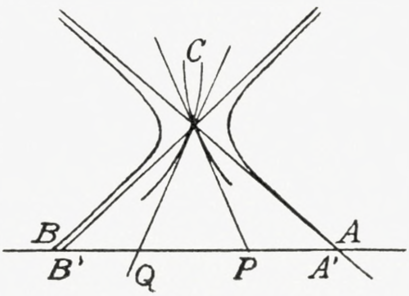

Fig. 6.

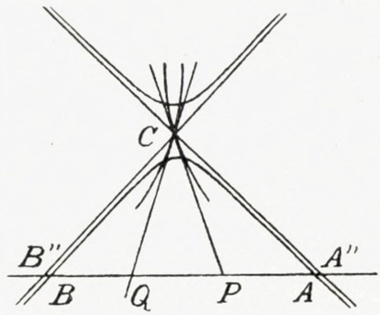

Fig. 7.

uns $r > s \geqq 1$. Wir zerlegen nun wie im vorigen Fall die Kurve von A aus in Pseudozweige, und auf jedem von diesen muss A ein Winkelpunkt sein. Wenn nämlich die Anfangstangente und die Schlusstangente eines Zweiges in A zusammenfallen, ohne dort eine Spitze zu bilden, dann wird der Pseudozweig ein völligstetiger Zweig sein, den wir für sich betrachten, sodass C^n als zerfallen betrachtet wird.

Weil $r > s$, gibt es wenigstens einen von A ausgehenden Pseudozweig φ, welcher nicht durch B geht. Die Gerade BA kann für φ keine von B ausgehende Stützgerade sein, denn die Zahl der aus einem Punkt B gehenden Stützgeraden muss immer paar sein, aus B geht aber keine eigentliche Tangente an φ, und φ hat ausser A keinen anderen Winkelpunkt. Der Schnittpunkt A von BA mit φ muss deshalb als ein einfacher Schnittpunkt gerechnet werden, und die Gerade hat ausser A und B keine weiteren Punkte mit C^n gemein. Hieraus folgt, dass φ unpaar sein muss. Den Winkelpunkt in A kann man beliebig wenig abrunden, und hierdurch wird keine neue Doppeltangente geschaffen, da aus A keine Tangenten an φ gehen. Die abgerundete Kurve ist also eine unpaare Kurve ohne Doppelpunkte, Doppeltangenten und Spitzen, also eine Kurve dritter Ordnung, und das bleibt auch bestehen, wenn die Abrundung aufgehoben wird.

Jetzt können wir endlich den Nachweis führen, dass B auf C^n ein einfacher Punkt sein muss. Erstens sehen wir, dass B kein mehrfacher Punkt auf einem von A ausgehenden Zweig ψ sein kann. Wenn nämlich B ein mehrfacher Punkt auf ψ wäre, dann könnte man noch ψ von B aus in (wenigstens zwei) Pseudozweige zerlegen, und von diesen könnte nur einer durch A gehen, da A ein einfacher Punkt auf ψ ist. Ein anderer nicht durch A gehender Zweig müsste unpaar sein — was man ganz wie oben sieht — und diese würde einen der früher genannten nicht durch B gehenden Zweige φ in wenigstens einem von A und B verschiedenen Punkt treffen, was ausgeschlossen ist, da C^n ausserhalb A und B keine Doppelpunkte haben darf.

Es kann also B nur dann ein mehrfacher Punkt sein, wenn mehrere von A ausgehende Pseudozweige sich in B schneiden. Ein solcher Zweig ψ_1 muss aber paar sein, denn die Gerade AB schneidet jedenfalls ψ_1 nur einmal in B, und die Gerade BA kann keine von B ausgehende Stützgerade sein, weil durch B keine andere (ausserhalb B berührende) Stützgerade an ψ_1 geht, so dass auch A ein einfacher Schnittpunkt von BA mit ψ_1 ist. Rundet man nun ψ_1 in A ab, dann wird er eine paare Kurve ohne Doppelpunkte, Doppeltangenten und Spitzen. Diese wird also eine Kurve zweiter Ordnung sein, und das kann nicht geändert werden, wenn die Abrundung aufgehoben wird (weil aus A keine Tangenten an ψ_1 gehen). Jeder andere von A ausgehende und B enthaltende Pseudozweig muss auch zweiter Ordnung sein. Zwei Kurven zweiter Ordnung, welche zwei und nur zwei Punkte miteinander gemein haben, werden aber immer Tangenten miteinander gemein haben, und das ist hier ausgeschlossen. Es kann also nur ein von A ausgehender Pseudozweig durch B gehen, und B muss ein einfacher Punkt der Kurve sein; hieraus folgt, dass A ein $(n-1)$facher Punkt ist.

Wir haben im obigen $r > s$ vorausgesetzt. Wenn nun $r = s$, dann hat man erstens die Möglichkeit, dass alle von A ausgehenden Pseudozweige φ durch B gehen. Diese Zweige sind dem obigen zufolge zweiter Ordnung, und das ist wie oben gesagt unmöglich, wenn C^n von M. I. sein soll. Wenn aber nicht alle Zweige φ durch B gehen, dann muss B mindestens auf einem der von A ausgehenden Pseudozweige — sagen wir ψ — ein mehrfacher Punkt sein. Ein von B ausgehender und nicht durch den auf ψ einfachen Punkt A gehender Pseudozweig von ψ muss — wie man ganz wie früher sieht — unpaar sein und demnach in einem Schnittpunkt mit einem Zweig φ einen ausserhalb A und B liegenden Doppelpunkt von C^n gehen, was ausgeschlossen ist. Wenn wir also den trivialen Fall $r = s = 1$ auslassen, dann ist $r = s$ nicht möglich.

Wir haben also gefunden, dass wenn sich auf den Leitlinien kein Grenzpunkt findet, die eine Leitlinie $(n-1)$-fach, die andere einfach sein muss. Umgekehrt sehen wir nun auch leicht:

Eine Regelfläche n-ter Ordnung mit einer Leitgeraden $(n-1)$-ter Ordnung und einer einfachen Leitgeraden ist, wenn keine Grenzpunkte vorhanden sind, immer von Maximalindex.

Es wird hier das einfachste sein, durch einen Erzeuger

m der Fläche F^n eine Ebene μ zu legen. Diese schneidet F^n in einer Kurve C^{n-1}, welche $(n-2)$mal durch den Schnittpunkt A mit der $(n-1)$fachen Leitlinie a, aber nicht durch B geht. Die Gerade AB schneidet in diesem Fall die Kurve C^{n-1} ausser in A noch in einem Punkt C. Man sieht nun ganz wie früher, dass jeder von A ausgehende nicht durch C gehende Pseudozweig φ unpaar sein muss, während der Pseudozweig ψ, der durch C geht, paar sein muss, noch zumal so, dass er zweiter Ordnung ist; hätte nämlich eine Gerade mehr als 2 Punkte mit ψ gemein, würde sie mit C^{n-1} mehr als $2+(n-3) = (n-1)$ Punkte gemein haben. Wir sehen auch in derselben Weise, dass C^{n-1} keine Doppeltangenten haben kann: eine Gerade z. B., welche ψ und zugleich einen Zweig φ berührt, würde mindestens $2+3+(n-4) = n+1$ Punkte mit C^{n-1} gemein haben. Es ist also C^{n-1} und somit auch F^n von Maximalindex.

Es erübrigt noch die Existenz der gefundenen Flächen darzutun.

Es ist nicht schwierig zu beschreiben, wie eine zu benutzende ebene Leitlinie C^{n-1} für eine F^n von M. I. zu konstruieren sei. Man wird von einer (algebraischen oder nicht algebraischen) Kurve dritter Ordnung mit einer Dornspitze ausgehen, deren Tangenten miteinander höchstens einen klein zu wählenden Winkel ε miteinander bilden. Diese drehe man um einen Punkt A der Kurve einen Winkel, der etwas grösser als $2\,\varepsilon$ ist, und verbinde danach die durch A gehenden Bögen passend miteinander. Dies genauer auszuführen, hat wohl nur wenig Wert, und wir wollen uns im folgenden an die algebraischen Kurven halten. Wir wissen von vornherein, dass Regelflächen F^n von M. I. für $n = 4$ vorhanden sind. Es kommt also nur darauf an, nachzuweisen, dass, wenn eine solche Fläche n-ter

Ordnung vorhanden ist, dann auch eine ebensolche Fläche von der nächst höheren Ordnung existiert. Dem obigen zufolge ist dabei nur nötig, eine passende ebene Leitkurve zu bestimmen, wonach die zwei Leitgeraden leicht anzugeben sind.

Nehmen wir erst eine Kurve C^n, die in einem Punkt A einen $(n-2)$fachen Punkt hat, aus welchem zwei Tangenten an C^n gehen. Zugleich wissen wir, dass es in der Ebene der Kurve einen Punkt B gibt, der nicht in C^n liegt, and aus welchem keine Tangenten an C_n gehen. Wir applizieren eine involutorische quadratische Transformation erster Art[1] mit A, B und einem in der Kurve gewählten neuen Punkt C als Hauptpunkte. Dadurch geht C^n in eine Kurve C^{n+1} über. Diese hat in A einen $(n-1)$fachen Punkt, aus welchem zwei Tangenten an C^{n+1} gehen, und aus B geht keine Tangente der Kurve, welche ausserhalb B berührt, wobei doch zu bemerken ist, dass B ein Punkt von C^{n+1} ist, weil die Gerade AC ausserhalb A und C noch einen Punkt D mit C^n gemein hat. Aber wir können davon ausgehen, dass B kein Inflexionspunkt auf C^{n+1} ist, weil wir voraussetzen können, dass die Tangente in D nicht durch B geht. Deshalb wird es in der Nähe von B Punkte B_1 geben, welche nicht auf C^{n+1} liegen, sondern auf der konkaven Seites des durch B gehenden Bogens von C^{n+1} aus welchen auch keine Tangenten an C^{n+1} gehen. Man kann deshalb C^{n+1} als Leitkurve einer F^{n+1} von M. I. benutzen in Verbindung mit zwei Leitgeraden, von welchen die eine durch A, die andere durch einen Punkt B_1 geht.

Nehmen wir endlich eine Kurve C^{n-1}, welche in A einen $(n-2)$fachen Punkt, und in deren Ebene

[1] D. h. wo jedem Hauptpunkt die Gegenseite des Hauptdreiecks entspricht.

ausserhalb der Kurve ein Punkt B liegt, aus welchem keine Tangente an C^{n-1} geht. Wir applizieren wieder ganz wie im vorigen Fall eine involutorische quadratische Transformation erster Art mit A, B und einem Punkt C, der ausserhalb C^{n-1} gewählt wird, als Hauptpunkte. Dadurch geht C^{n-1} in eine C^n über, in welcher A ein $n-1$-facher Punkt ist, indem wir C noch so gewählt haben, dass C^{n-1} von BC in $(n-1)$ Punkten geschnitten wird. Aus A gehen keine Tangenten (welche ausserhalb A berühren), und aus B geht keine Tangente, welche ausserhalb B berührt. Aber B liegt auf C^n. Man kann jedoch auch hier davon ausgehen, dass B kein Inflexionspunkt auf C^n ist; man kann deshalb wie oben in der Nähe von B und ausserhalb C^n einen Punkt B_1 finden, so dass aus B_1 keine Tangente an C^n geht. Aber dann ist eine gesuchte Kurve C^n gefunden.

§ 7.

Über Flächen von Maximalindex, welche nicht Regelflächen sind.

Die ganze Frage von der Bestimmung der Flächen von M. I. ist selbstverständlich nicht durch Behandlung der Regelflächen abgetan.

Aber, wie es scheint, spielen doch die Regelflächen eine besondere Rolle.

Erstens kommen die abwickelbaren Flächen, wenn man von den Kegelflächen absieht, nicht in Betracht. Eine Ebene wird nämlich die Fläche in einer Kurve schneiden können, welche mehr als eine Spitze hat, was nicht angeht.

Was die allgemeine Fläche betrifft, so erinnere man sich, dass mehrfache Linien geradlinig sein müssen, was schon das Gebiet der brauchbaren Flächen wesentlich beschränkt.

Wir wollen nun die irreduktiblen Flächen vierter Ordnung von M. I. bestimmen, welche nicht geradlinig sind.

Eine ebene Kurve vierter Ordnung von M. I. muss, wie wir in § 1 gesehen haben, wenigstens einen Doppelpunkt haben. Eine irreduktible Fläche vierter Ordnung von M. I. muss also wenigstens eine Doppelgerade und höchstens drei solche haben — auch wenn man an eine nicht algebraische Fläche denkt.

Nehmen wir erst eine Fläche mit einer Doppelgeraden. Alle ebenen Schnitte derselben müssen aus zwei völlig getrennten Kurven dritter Ordnung zusammengesetzt sein. Nach derjenigen Auffassung der Irreduktibilität, welche in dieser Arbeit benutzt wird, ist diese Fläche nicht irreduktibel und kommt also nicht in Betracht.

Wenn die Fläche zwei Doppellinien a und b hat, dann ist die Fläche eine Regelfläche, wenn die Geraden windschief gegeneinander liegen. Wenn sie sich aber schneiden, dann ist die Fläche eine F^4 mit einem zerfallenen Doppelkegelschnitt. Diese Fläche kann, wenn algebraisch, immer durch zwei projektive Büschel von Flächen zweiter Ordnung erzeugt werden. Betrachtet man nun zwei projektive Büschel von Flächen vierter Ordnung, welche alle durch einen festen zerfallenen (oder nicht zerfallenen) Kegelschnitt abgehen, dann werden die Ebenen, welche durch jene Kegelschnitte gehen, worin sich entsprechende Flächen, ausser in (ab), schneiden, einen immer reellen Kegel einhüllen. Die Erzeuger dieser Kegelfläche sind entweder Doppeltangenten der Fläche, oder auch haben sie keine Punkte mit der Fläche gemein; beides macht es aber unmöglich, dass die Fläche von M. I. sein kann.[1]

[1] Eine rein geometrische Theori dieser Fläche siehe z. B. Tidsskrift f. Matematik 1880, p. 81—108; 113—121.

Nehmen wir nun eine Fläche mit drei Doppellinien. Wenn diese alle zusammenfallen, oder auch wenn nicht alle drei durch denselben Punkt gehen, ist die Fläche (wenn keine Kegelfläche) eine Regelfläche. Es müssen also die drei Geraden durch einen Punkt gehen. Ist die Fläche algebraisch, dann wird schon hierdurch die Fläche als eine Steinersche Fläche charakterisiert. Aber auch wenn die Fläche nicht algebraisch, aber von M. I. ist, wird sie von jeder ihrer berührenden Ebenen in einer C^4 von M. I. mit vier Doppelpunkten, also in zwei Kurven zweiter Ordnung geschnitten.

Die Fläche ist deshalb eine verallgemeinerte Steinersche Fläche.

Eine Steinersche Fläche (ob »erweitert« oder nicht) hat keine andere Doppeltangenten als Gerade, welche in einer »Tropenebene« liegen, d. h. in einer jener Ebenen, welche die Fläche einer Kurve zweiter Ordnung entlang berühren. Wenn also diese Ebenen nicht (als reelle) existieren, dann hat die Fläche keine Doppeltangenten. Jede Ebene, welche die Fläche nicht berührt, schneidet also dieselbe in einer Kurve vierter Ordnung ohne Doppeltangenten. Eine solche Kurve muss aber von M. I. sein. Wir haben also gefunden:

Die einzige irreduktible algebraische Fläche vierter Ordnung von Maximalindex, welche keine Regelfläche ist, ist eine Steinersche Fläche ohne Tropen.

Die allgemeiue Frage lasse ich dahingestellt sein. Aber durch Zusammensetzung der in dieser Arbeit gefundenen irreduktiblen Flächen wird man jedenfalls neue reduktible herstellen können.

Forelagt paa Mødet den 25. April 1924.
Færdig fra Trykkeriet den 29. November 1924.

MATHEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER

UDGIVNE AF

DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB

4. BIND (Kr. 13,20):

		Kr. Ø.
1.	Nielsen, Niels: Recherches sur l'Équation de Fermat. 1922	5.75
2.	Jacobsen, C. & Olsen, Johs.: On the Stopping Power of Lithium for α-Rays. 1922	0.60
3.	Nørlund, N. E.: Nogle Bemærkninger angaaende Interpolation med æquidistante Argumenter. 1922	1.10
4.	Brønsted, J. N.: The Principle of the Specific Interaction of Ions. 1921	1.15
5.	Pedersen, P. O.: En Metode til Bestemmelse af den effektive Modstand i højfrekvente Svingningskredse. 1922	0.70
6.	Prytz, K.: Millimètre étallonné par des interférences. 1922	0.75
7.	Pedersen, P. O.: On the Lichtenberg Figures. Part II. 1. The distribution of the velocity in positive and negative figures. 2. The use of Lichtenberg figures for the measurement of very short intervals of time. With two plates. 1922	2.15
8.	Bøggild, O. B.: Re-Examination of some Zeolites (Okenite, Ptilolite, etc.). 1922	1.40
9.	Wiedemann, E. und Frank, J.: Über die Konstruktion der Schattenlinien auf horizontalen Sonnenuhren von Tâbit ben Qurra. 1922	0.75
10.	Pedersen, P. O.: Om elektriske Gnister. I. Gnistforsinkelse. Med 2 Tavler. 1922	3.25

5. BIND (Kr. 13,10):

		Kr. Ø.
1.	Nielsen, Niels: Recherches sur les Équations de Lagrange. 1923	3.20
2.	Kampé de Fériet, J.: Sur une formule d'addition des Polynomes d'Hermite. 1923	0.50
3.	Hansen, H. M., Takamine, T., and Werner, Sven: On the Effect of Magnetic and Electric Fields on the Mercury Spectrum. With two plates and figures in the text. 1923	2.25
4.	Nielsen, Niels: Recherches sur certaines Équations de Lagrange de formes spéciales. 1923	3.00
5.	Nielsen, Niels: Sur le genre de certaines Équations de Lagrange. 1923	2.25

Kr. Ø.

6. Kloosterman, H. D.: Ein Satz über Potenzreihen unendlich vieler Variabeln mit Anwendung auf Dirichletsche Reihen. 1923. .... 1.00
7. Nielsen, Niels: Notes supplémentaires sur les Équations de Lagrange. 1923. .... 0.75
8. Hansen, H. M. and Werner, S.: The Optical Spectrum of Hafnium. 1923. .... 0.60
9. Gjaldbæk, J. K.: Über das Potential zwischen der 0.1 n und 3.5 n Kalomelelektrode. 1924. .... 0.60
10. Hartmann, Jul.: Undersøgelser over Gnisten ved en Kvægsølvstraalekommutator. 1924. .... 1.25
11. Bjerrum, Niels, Unmack, Augusta und Zechmeister, László: Die Dissoziationskonstante von Methylalkohol. 1924. .... 1.10
12. Nielsen, Jakob: Die Gruppe der dreidimensionalen Gittertransformationen. 1924. .... 1.00

6. BIND:

Kr. Ø.

1. Nielsen, Niels: Sur l'opération itérative des Équations de Lagrange. 1924. .... 3.10
2. Urey, H. C.: On the Effect of perturbing Electric Fields on the Zeeman Effect of the Hydrogen Spectrum. 1924 .... 0.65
3. Bøggild, O. B.: On the Labradorization of the Feldspars. 1924 3.00
4. Pedersen, P. O.: Om elektriske Gnister. II. Eksperimentelle Undersøgelser over Gnistforsinkelse og Gnistdannelse. 1924 4.30
5. Juel, C.: Über Flächen von Maximalindex. 1924. .... 1.25
6. Nielsen, Niels: Sur une Équations de Lagrange. 1924 .... 1.25